29/4/20

10ο online μάθημα

Άσκηση 3.5

$\bar{X} \sim N(0, 16/25)$
$\bar{Y} \sim N(1, 9/25)$ } ανεξ/τα

Επομένως $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(-1, \frac{16}{25} + \frac{9}{25}\right)$

$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N(-1, 1)$

$P(\bar{X} - \bar{Y} > 0) =$

$= P\left(\frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (-1)}{1} > \frac{0-(-1)}{1}\right) =$

$= P(Z > 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

Άσκηση 3.6:

X_i η τ.μ. που περιγράφει το βάρος i-οστού κουτιού σε γρ.

$X_i \sim N(\mu = 900, \sigma^2 = 50^2 \text{ γρ}^2)$

Τότε $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

δηλαδή $\sum_{i=1}^{40} X_i \sim N(36.000, 100.000)$

$P\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \leq 35.500\right) = P\left(\frac{\sum X_i - 36.000}{\sqrt{100.000}} \leq \frac{35.500 - 36.000}{\sqrt{100.000}}\right) =$

$= P\left(Z \leq \frac{-500}{316.23}\right) = P(Z \leq -1.58) = 0.0571$

Άσκηση 3.11:

Είναι $\bar{X}$ η μέση τιμή ενός τ.δ μεγέθους $n=100$ από πληθυσμό με $\mu=50$, $\sigma^2=100$

Ξέρω τότε ότι

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{προσ}} N(0,1)$$

Άρα $$\frac{\bar{X}-50}{10/10} \xrightarrow{\text{προσ.}} N(0,1)$$

$$P(49<\bar{X}\leq 51) \simeq P(-1\leq Z\leq 1) = 2P(0\leq Z\leq 1) = 0,6820$$

Άσκηση 3.12:

X_i είναι η τ.μ. που παριστάνει το σφάλμα στρογγυλευσης κατά την i-οστή μέτρηση

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{n}$$

Δίνεται ότι n αρκετά μεγάλο

Από Κ.Ο.Θ.

$$\bar{X} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$$

όπου $\mu = EX_i$, $\sigma^2 = VarX_i$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1+2x) & -1/2 \leq x \leq 0 \\ 2(1-2x) & 0\leq x\leq 1/2 \\ 0 & \end{cases}$$

$$EX = \int_{-1/2}^{0} 2x(1+2x)\,dx + \int_0^{1/2} 2x(1-2x)dx = 0$$

$$VarX = EX^2-(EX)^2 = EX^2 - 0 = \frac{1}{24}$$

$$EX^2 = \int_{-1/2}^{0} 2x^2(1+2x)dx + \int_0^{1/2} 2x^2(1-2x)dx = \frac{1}{24}$$

Άρα $\bar{x} \sim N\left(0, \frac{1}{n 24}\right)$

Ζητώ $P\left(|\bar{x}| \leq \frac{1}{\sqrt{3n}}\right) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{3n}} < \bar{x} < \frac{1}{\sqrt{3n}}\right)$.

$= P(-\sqrt{8} \leq Z \leq \sqrt{8}) = 2P(0 \leq Z \leq \sqrt{8}) = 0.9954$

Άσκηση 3.13:

$\bar{X} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(\mu, \sigma^2/n)$

όπου $\mu = EX$ $\sigma^2 = Var X$

$EX = \int_0^1 \frac{1}{2} x \, dx = 1$

$Var X = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{6}$

$Var X = \frac{8}{6} - 1^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Επομένως $\bar{X} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N\left(1, \frac{1}{3 \cdot 48}\right)$

$P(0.95 < \bar{x} < 1.05) = P\left(\frac{0.95-1}{\sqrt{\frac{1}{3 \cdot 48}}} \leq \frac{\bar{X}-1}{\sqrt{\frac{1}{3 \cdot 48}}} \leq \frac{1.05-1}{\sqrt{\frac{1}{3 \cdot 48}}}\right)$

$\simeq P(-12 \cdot 0.05 \leq Z \leq 12 \cdot 0.05) = P(-0.6 \leq Z \leq 0.6) =$

$= 2P(0 \leq Z \leq 0.6) = 2 \cdot 0.2257 = 0.4514$

Ασκηση 3.14:

$$\bar{X} \overset{προσ}{\sim} N\left(\mu = 1285, \ \frac{\sigma^2}{n} = \frac{150^2}{100}\right)$$

$$P(\bar{X} \geq 1.300) = P\left(\frac{\bar{X} - 1285}{\sqrt{150^2/100}} \geq \frac{1300 - 1285}{\sqrt{150^2/100}}\right)$$

$$\simeq P\left(Z \geq \frac{15}{15}\right) = P(Z \geq 1) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) =$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

Ασκηση 3.15:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| \leq \sqrt{12}\right)$$

Είναι $\sum_{i=1}^{100} X_i \overset{προσ.}{\sim} N(100 \cdot \mu, \ 100\sigma^2)$

όπου $\mu = EX_i$ $\quad \sigma^2 = Var X_i$

με $X_i \sim U(-1/2, \ 1/2)$

$$EX_i \ \underset{EX = \frac{a+b}{2}}{\overset{X \sim U(a,b)}{=\!=\!=}} \ \int_{-1/2}^{1/2} 1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1/2}^{1/2} = 0$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \ , \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

δηλαδή $EX = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = 0$

$$EX^2 = \int_{-1/2}^{1/2} 1x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{12}$$

Άρα $Var X = EX^2 - (EX)^2 = \dfrac{1}{12}$

Επομένως $\sum_{i=1}^{100} X_i \overset{προσ}{\sim} N\left(0, \ 100 \cdot \frac{1}{12}\right)$

$$P\left(-\sqrt{12} \le \Sigma X_i \le \sqrt{12}\right) = P\left(\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{100/12}} \le \frac{\Sigma X_i}{\sqrt{100/12}} \le \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{100/12}}\right)$$

$$\simeq 2P(0 \le Z \le 12/10) = 2P(0 \le Z \le 1.2) = 2 \cdot 0.3849 = 0.7698$$

Άσκηση 3.16:

Ζητά $P\left(\sum_{i=1}^{30 \cdot 150} X_i > 3.700\right)$ σε γραμμάρια

όπου X_i η τ.μ. που παριστάνει το βάρος ενός τρανζίστορ σε γραμμάρια $30 \cdot 150 = 4.500$

$$\sum_{i=1}^{4500} X_i \overset{\text{προσ}}{\sim} N(4500\,\mu, 4500\,)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{4500} X_i > 3.700\right) = P\left(\frac{\Sigma X_i - 4500 \cdot 0.8}{\sqrt{4500 \cdot 0.49}} \ge \frac{3700 - 4500 \cdot 0.8}{\sqrt{4500 \cdot 0.49}}\right)$$

$$\simeq P\left(Z \ge \frac{3700 - 4500 \cdot 0.8}{46.96}\right) = P\left(Z \ge \frac{100}{46.96}\right) = P(Z \ge 2.13) =$$

$= 0.0166$

Άσκηση 3.17:

i) Έστω X η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των αεροπλάνων σε οποιαδήποτε εικοσάλεπτη περίοδο. Τότε

$X \sim P(100)$ $\qquad \mu = 6^2 = 100$

$P(80 \le X \le 120) = P(80 - 100 < X - \mu < 120 - 100) = P(-20 \le X - \mu \le 20)$

Δηλαδή ζητά

$$P(|X - \mu|) \le 20$$

Σελίδα 35 βιβλίο Λουκά

$$P(|X - \mu| \ge \varepsilon) = \frac{\mathrm{Var}X}{\varepsilon^2}$$

ή $1 - P(|X - \mu| \le \varepsilon) \le \dfrac{\mathrm{Var}X}{\varepsilon^2} \Rightarrow$

$$P(|X-\mu| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{Var X}{\varepsilon^2}$$

Εφαρμογή:

$$P(|X-\mu| \le 20) \ge 1 - \frac{100}{20^2} = 1 - \frac{100}{400} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

ii) Χρησιμοποιώντας το Κ.Ο.Θ.

$X \sim P(100)$ μπορεί να γραφεί ως $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$ με $X_i \sim P(1)$

$$\frac{X - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$$

δηλαδή $$\frac{X - n \cdot 1}{\sqrt{n}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$$

$$\frac{X - 100}{\sqrt{100}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$$

Επομένως είναι: $P(80 \le X \le 120) = P(79.5 < X < 120.5) =$

$$= P\left(\frac{79.5 - 100}{10} \le Z \le \frac{120.5 - 100}{10} \right) \simeq P(-2.05 \le Z \le 2.05)$$

$$= 2P(0 \le Z \le 2.05) = 2 \cdot 0.4798 = 0.9596$$

Άσκηση 3.18:

i) $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E X_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$$

$$Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} Var X_i = \sum \lambda = n\lambda$$

ii) $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$

με $EX_i = \lambda = Var X_i$

$$\frac{S_{100} - 100\lambda}{\sqrt{100\lambda}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$$

$$P(S_{100} > 440) = P(S_{100} \ge 441)$$

$= P(S_{100} \geq 440.5) \simeq P\left(\frac{S_{100}-400}{\sqrt{400}} \geq \frac{40.5}{\sqrt{400}}\right) =$

$= P(Z \geq 2.025) = 0.0217$

Άσκηση 3.19:

i) $X \sim B(n=10, p=0.01)$

$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

$P(X=1) = \binom{10}{1} 0.01^1 \, 0.99^9 = 10 \cdot \frac{1}{100} \left(\frac{99}{100}\right)^9$

ii) ΠΡΕΠΕΙ ΘΕΩΡΙΑ ΝΑ ΓΙΝΕΙ ΟΤΙ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ προσεγγίζεται από Poisson $(n \cdot p)$

$X \overset{\text{προσ.}}{\sim} P\left(300 \cdot \frac{1}{100}\right) = P(3)$

$P(X \leq 3) = \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-3}3^k}{k!} = e^{-3} + e^{-3}\frac{3}{1!} + e^{-3}\frac{3^2}{2!}$

$\overset{\text{σελ } 336}{=} 0.64723$

iii) $P(4 \leq X \leq 12) = P(3.5 \leq X \leq 12.5) =$

$= P\left(\frac{3.5 - 600 \cdot \frac{1}{600}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}}} \leq Z \leq \frac{12.5 - 600 \cdot \frac{1}{600}}{\sqrt{600 \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{99}{100}}}\right)$

$\simeq P[-1.026 \leq Z \leq 2.67] = P(0 \leq Z \leq 1.03) + P(0 \leq Z \leq 2.67) =$

$= 0.3485 + 0.4962 = 0.8447$

Άσκηση 3.20:

Έστω X η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των τιμών που είναι μικρότερες του 3 στις 72 που επιλέχθηκαν.

Άρα $X \sim B(n=72, p)$ όπου

$p = P(\text{τιμή} < 3) = \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^3 x^{-2}\,dx = \frac{2}{3}$

Ζητάμε την πιθανότητα $P(X \geq 50)$ όπου
$X \sim B(n = 72,\ p = 2/3)$
$$P(X \geq 49.5) \overset{\text{προσέγγ}}{=} P\left(\frac{X - 72 \cdot 2/3}{\sqrt{72 \cdot 2/3 \cdot 1/3}} \geq \frac{49.5 - 72 \cdot 2/3}{\sqrt{72 \cdot 2/3 \cdot 1/3}} \right)$$
$$\simeq P\left(Z \geq \frac{49.5 - 48}{4} \right) = P\left(Z \geq \frac{1.5}{4} \right) = P\left(Z \geq \frac{3}{8} \right) =$$
$$= P(Z \geq 0.375) = 0.5 - 0.1443 = 0.3557$$

Άσκηση 3.21:

i) $X \sim B(n = 10,\ p = 0.05)$
$$P(X = 3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7$$

ii) $Y \sim NB(k = 2,\ p = 0.05)$
$$P(Y = 15) = \binom{14}{1} p^2 (1-p)^{13}$$

iii) $W \sim B(n = 600,\ p = 0.05)$
$$P(25 \leq W \leq 35) = \sum_{k=25}^{35} \binom{n}{k} p^k (1-p)^n$$

Προσεγγιστικά
$P(24.5 \leq W \leq 35.5)$ όπου $W \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(600 \cdot 0.05,\ 600 \cdot 0.05 \cdot 0.95)$
δηλαδή $W \overset{\text{προσ}}{\sim} N(30,\ 28.5)$
$$P(24.5 \leq W \leq 35.5) \simeq P\left(\frac{24.5 - 30}{\sqrt{28.5}} \leq Z \leq \frac{35.5 - 30}{\sqrt{28.5}} \right)$$
$$P(-1.03 \leq Z \leq 1.03) = 2 \cdot 0.3485 = 0.697$$

Άσκηση 3.22:

Έστω X η τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των επιβατών που έχουν βγάλει εισιτήριο αλλά τελικά δεν εμφανίζονται στους 160 που έχουν κάνει κράτηση
$$X \sim B(n = 160,\ p = 0.05)$$
Ζητώ $P(X \geq 10)$

Εύρεση ακριβής $\sum_{k=10}^{160} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Προσεγγ/κα $X \sim B(n,p)$

προσέγγιση $N(np,\ np(1-p))$

$P(X \geq 90) = P(X \geq 95) \simeq P\left(\frac{X - 160 \cdot 0{,}05}{\sqrt{160 \cdot 0.05 \cdot 0.95}} \geq \frac{95 - 160 \cdot 0.05}{\sqrt{160 \cdot 0.05 \cdot 0.95}} \right)$

$= P\left(Z \geq \frac{95-8}{\sqrt{7.6}} \right) = P(Z \geq 0.544) = 0.5 - 0.2054 = 0.2946$

Άσκηση 4.1:

Είναι $EU = E\left[w S_x^2 + (1-w) S_Y^2 \right] \xrightarrow[\text{μέσης τιμής}]{\text{ιδιοτ.}} EU = w E S_x^2 + (1-w) E S_Y^2$

Όμως $E S_x^2 = \sigma^2$

$E S_Y^2 = \sigma^2$

και αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Άσκηση 4.2:

Για την Poisson γνωρίζουμε ότι $X \sim P(\lambda)$ τότε

$EX = \lambda$, $\text{Var} X = \lambda$

Επίσης ξέρουμε ότι $E\bar{X} = \mu = \lambda$ και $ES^2 = \sigma^2 = \lambda$

καθώς έχουμε δει στην θεωρία ότι η δειγματική μέση τιμή

είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της πληθυσμιακής μέσης τιμής

ενώ την ίδια ιδιότητα για την πληθυσμιακή διακύμανση ικανοποιεί

η δειγματική διακύμανση.

Άσκηση 4.3:

Καθώς θα επιλεγεί είτε η μέθοδος Α είτε η μέθοδος Β και

λαμβάνοντας υπόψη το διαθέσιμο ποσό (500) και το κόστος

κάθε μέτρησης εύκολα προκύπτει ότι δύναται να μετρηθούν

$\frac{500}{20} = 25$ και $\frac{500}{50} = 10$

μετρήσεις Α και Β αντίστοιχα.

Καθώς μας λέει ότι οι 2 μέθοδοι είναι αμερόληπτοι, γίνεται αλλως αντιληπτό ότι μεταξύ των δυο θα επιλέγει αυτή με τη μικρότερη διακύμανση. Καθώς χρησιμοποιείται η μέση τιμή τα δείγματος τότε ξέρουμε ότι έχει διακύμανση σ^2/n.
Ειδικότερα για την μέθοδο Α:

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{4}$$

ενώ για την μέθοδο Β:

$$\frac{3}{10}$$

Άρα προτιμητέα η μέθοδος Α.

Άσκηση 4.4:

Υπενθύμιση: Το ποσοστό των φορών που ένα διάστημα (L, U) περιέχει την παράμετρο θ λέγεται επίπεδο ή βαθμός εμπιστοσύνης και συμβολίζεται με $100(1-a)\%$

Άρα στόχος είναι να βρούμε σε τι ποσοστό των φορών περιέχεται το

μ = μέση τιμή πληθυσμού $= \frac{4+5+6}{3} \Rightarrow \mu = 5$ στο διάστημα (L, U)

Πως προκύπτουν με τις δοθείσες σχέσεις και δείγματα με επανάθεση $n=2$. Τα δείγματα με επανάθεση μεγέθους 2 είναι σε πλήθος 9:

Δείγματα	$\bar{X}$	(L, U)
(4,4)	4	$4 \pm \frac{1}{6}$
(4,5)	4.5	$4.5 \pm \frac{1}{6}$
(4,6)	5	$5 \pm 1/6$
(5,4)	4.5	$4.5 \pm 1/6$
(5,5)	5	$5 \pm 1/6$
(5,6)	5.5	$5.5 \pm 1/6$
(6,4)	5	$5 \pm 1/6$
(6,5)	5.5	$5.5 \pm 1/6$
(6,6)	6	$6 \pm 1/6$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι:

$\sigma^2_{\bar{x}} = Var\, \bar{x} = \sigma^2/n = \sigma^2/2$

όπου σ^2 = πληθυσμιακή διακύμανση

είναι $\mu = 5$

$\sigma^2 = E(x-\mu)^2 = \frac{1}{3}\left\{(4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2\right\} = \frac{1}{3} \cdot 2$

Άρα $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$

Μετρώ στη συνέχεια σε πόσα από αυτά τα (L, U) ανήκει το 5 $(\mu = 5)$

Για διαστήματα έχουν κύκλωση

επομένως βαθμός εμπιστοσύνης

$\frac{3}{9} \cdot 100\% = (1-a)\, 100\%$

δηλαδή $a = \frac{2}{3}$